ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora | Segundo cuatrimestre – 2020
Duración: 90 minutos. | 27/III/21 – 13:00 hs.

Apellido y Nombres:

Padrón:

---

1. Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 := \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T\right\},$$
$$\mathbb{S}_2 := \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}.$$

Construir un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

---

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ y sea $Y \in C^\infty\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right)$ la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(0) = \begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}^T. \end{cases}$$

Hallar $Y\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

---

3. Construir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ que tenga las siguientes propiedades: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T \in \text{nul}(A)$, $v = \begin{bmatrix}-4 & 0 & 4\end{bmatrix}^T$ es un autovector de $A^T A$ tal que $Av = \begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}^T$, y $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{2}$.

---

4. Sean $Q_1, Q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las formas cuadráticas definidas por

$$Q_1(x) := 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 \quad \text{y} \quad Q_2(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2.$$

Hallar el valor máximo de $Q_1(x)$ sujeto a la restricción $Q_2(x) = 1$ y determinar los vectores que lo realizan.